

# MATEMATICA

## Indicazioni Nazionali Liceo Classico, Musicale e Coreutico

### LINEE GENERALI E COMPETENZE

Al termine del percorso dei licei classico, linguistico, musicale coreutico e delle scienze umane lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di semplici fenomeni, in particolare del mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale.

Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.

Di qui i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio:

- 1) gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);
- 2) gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana, le funzioni elementari dell'analisi e le prime nozioni del calcolo differenziale e integrale;
- 3) un'introduzione ai concetti matematici necessari per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale e alla nozione di derivata;
- 4) un'introduzione ai concetti di base del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica;
- 5) il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);
- 6) costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo;
- 7) una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica;
- 8) una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio («invarianza delle leggi del pensiero»), della sua diversità con l'induzione fisica («invarianza delle leggi dei fenomeni») e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico.

Questa articolazione di temi e di approcci costituirà la base per istituire collegamenti e confronti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze naturali e sociali, la filosofia e la storia.

Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie elementari per la costruzione di modelli matematici in casi molto semplici ma istruttivi, e saprà utilizzare strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo. Nel liceo classico un'attenzione particolare sarà posta alle relazioni tra pensiero matematico e pensiero filosofico; nel liceo linguistico, al ruolo dell'espressione linguistica nel ragionamento matematico; nel liceo musicale e coreutico, al ruolo delle strutture matematiche nel linguaggio musicale; nel liceo delle scienze umane, a una visione critica del ruolo della modellizzazione matematica nell'analisi dei processi sociali.

Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale.

L'ampio spettro dei contenuti che saranno affrontati dallo studente richiederà che l'insegnante sia consapevole della necessità di un buon impiego del tempo disponibile. Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, verranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi. L'approfondimento degli aspetti tecnici, in questi licei, sarà strettamente funzionale alla comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina. L'indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità.

### OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO

## **Primo biennio**

### ***Aritmetica e algebra***

Il primo biennio sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico. Lo studente svilupperà le sue capacità nel calcolo (mentale, con carta e penna, mediante strumenti) con i numeri interi, con i numeri razionali sia nella scrittura come frazione che nella rappresentazione decimale. In questo contesto saranno studiate le proprietà delle operazioni.

Lo studio dell'algoritmo euclideo per la determinazione del MCD permetterà di approfondire la conoscenza della struttura dei numeri interi e di un esempio importante di procedimento algoritmico. Lo studente acquisirà una conoscenza intuitiva dei numeri reali, con particolare riferimento alla loro rappresentazione geometrica su una retta. La dimostrazione dell'irrazionalità di  $\sqrt{2}$  e di altri numeri sarà un'importante occasione di approfondimento concettuale. Lo studio dei numeri irrazionali e delle espressioni in cui essi compaiono fornirà un esempio significativo di applicazione del calcolo algebrico e un'occasione per affrontare il tema dell'approssimazione. L'acquisizione dei metodi di calcolo dei radicali non sarà accompagnata da eccessivi tecnicismi manipolatori.

Lo studente apprenderà gli elementi di base del calcolo letterale, le proprietà dei polinomi e le più semplici operazioni tra di essi.

Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un'equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica.

### ***Geometria***

Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.

Al teorema di Pitagora sarà dedicata una particolare attenzione affinché ne siano compresi sia gli aspetti geometrici che le implicazioni nella teoria dei numeri (introduzione dei numeri irrazionali) insistendo soprattutto sugli aspetti concettuali.

Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti.

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.

Lo studente apprenderà a far uso del metodo delle coordinate cartesiane, in una prima fase limitato alla rappresentazione di punti e rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità. L'intervento dell'algebra nella rappresentazione degli oggetti geometrici non sarà disgiunto dall'approfondimento della portata concettuale e tecnica di questa branca della matematica.

### ***Relazioni e funzioni***

Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni.

Lo studente studierà le funzioni del tipo  $f(x) = ax + b$ ,  $f(x) = |x|$ ,  $f(x) = a/x$ ,  $f(x) = x^2$  sia in termini strettamente matematici sia in funzione della descrizione e soluzione di problemi applicativi. Saprà studiare le soluzioni delle equazioni di primo grado in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite, e conoscerà le tecniche necessarie alla loro risoluzione grafica e algebrica. Apprenderà gli elementi della teoria della proporzionalità diretta e inversa.

Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.

### ***Dati e previsioni***

Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonché l'uso di strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche. Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti.

Lo studente apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.

Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica

### ***Elementi di informatica***

Lo studente diverrà familiare con gli strumenti informatici, al fine precipuo di rappresentare e manipolare oggetti matematici e studierà le modalità di rappresentazione dei dati elementari testuali e multimediali.

Un tema fondamentale di studio sarà il concetto di algoritmo e l'elaborazione di strategie di risoluzioni algoritmiche nel caso di problemi semplici e di facile modellizzazione; e, inoltre, il concetto di funzione calcolabile e di calcolabilità e alcuni semplici esempi relativi.

### **Secondo biennio**

#### ***Aritmetica e algebra***

Lo studente apprenderà a fattorizzare semplici polinomi, saprà eseguire semplici casi di divisione con resto fra due polinomi, e ne approfondirà l'analogia con la divisione fra numeri interi.

Apprenderà gli elementi dell'algebra dei vettori (somma, moltiplicazione per scalare e prodotto scalare), e ne comprenderà il ruolo fondamentale nella fisica.

Lo studio della circonferenza e del cerchio, del numero  $\Pi$ , e di contesti in cui compaiono crescite esponenziali con il numero  $e$ , permetteranno di approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti. Attraverso una prima conoscenza del problema della formalizzazione dei numeri reali lo studente si introdurrà alla problematica dell'infinito matematico e delle sue connessioni con il pensiero filosofico. Inoltre acquisirà i primi elementi del calcolo approssimato, sia dal punto di vista teorico sia mediante l'uso di strumenti di calcolo.

#### ***Geometria***

Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico.

Inoltre, lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria.

Studierà le proprietà della circonferenza e del cerchio e il problema della determinazione dell'area del cerchio. Apprenderà le definizioni e le proprietà e relazioni elementari delle funzioni circolari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica.

Studierà alcuni esempi significativi di luogo geometrico.

Affronterà l'estensione allo spazio di alcuni temi e di alcune tecniche della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, studierà le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità.

#### ***Relazioni e funzioni***

Lo studente apprenderà lo studio delle funzioni quadratiche; a risolvere equazioni e disequazioni di secondo grado e rappresentare e risolvere problemi utilizzando equazioni di secondo grado.

Studierà le funzioni elementari dell'analisi e dei loro grafici, in particolare le funzioni polinomiali, razionali, circolari, esponenziale e logaritmo.

Apprenderà a costruire semplici modelli di crescita o decrescita esponenziale, nonché di andamenti periodici, anche in rapporto con lo studio delle altre discipline; tutto ciò sia in un contesto discreto sia continuo. Non sarà richiesta l'acquisizione di particolare abilità nella risoluzione di equazioni e disequazioni in cui compaiono queste funzioni, abilità che sarà limitata a casi semplici e significativi.

#### ***Dati e previsioni***

Lo studente, in ambiti via via più complessi, il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti, saprà far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione.

Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio.

In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico.

### **Quinto anno**

#### ***Geometria***

Lo studente apprenderà i primi elementi di geometria analitica dello spazio e la rappresentazione analitica di rette, piani e sfere.

#### ***Relazioni e funzioni***

Lo studente approfondirà lo studio delle funzioni fondamentali dell'analisi anche attraverso esempi tratti dalla fisica o da altre discipline. Acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici.

Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale - in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità - anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi). Non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche del calcolo, che si limiterà alla capacità di derivare le funzioni già studiate, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, le funzioni razionali e alla capacità di integrare funzioni polinomiali intere e altre funzioni elementari, nonché a determinare aree e volumi in casi semplici. L'obiettivo principale sarà soprattutto quello di comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura. In particolare, si tratterà di conoscere l'idea generale di ottimizzazione e le sue applicazioni in numerosi ambiti.

#### ***Dati e previsioni***

Lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni di probabilità (in particolare, la distribuzione binomiale e qualche esempio di distribuzione continua).  
In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente avrà ulteriormente approfondito il concetto di modello matematico e sviluppato la capacità di costruirne e analizzarne esempi.